利子のコスト化に関連する数学的補足

今回の課題
利子のコスト化に関連して，そこから生じてくる実務的な計算の数学的な基礎を説明する。
キーワード
幾何級数，単利・複利，割引現在価値，資本還元，ネイピア数，連続複利

1. はじめに

ここでは，講義の際には省略していた，資本還元の計算式の導出方法について補足をしておく。

　資本還元の計算式は無限幾何級数の応用によって導出されるから，最初にまず無限幾何級数を説明する。

ここでは，わかりやすさを最優先にしたために，必ずしも数学的にエレガントな論証方式を採用していない。

　なお，この補足の内容を試験に出すことはない。

2. 幾何級数

2.1 幾何級数

一般に，

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots ar^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a \cdot r^{i-1} \qquad (2.1)$$

を**幾何級数**または等比級数と呼ぶ。ここで，a を**初項**，r を**公比**，n を**項数**と呼ぶ。

　さて，S_n から $r \cdot S_n$ を引いてみよう。(1) で見たように，

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots ar^{n-1}$$

である。また，これに r を掛けると，

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + \dots ar^{n-1} + ar^n$$

になる。したがって，S_n から $r \cdot S_n$ を引くということは，

Memo

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1} \\ r \cdot S_n &= \quad\; ar + ar^2 + \ldots ar^{n-1} + ar^n \end{aligned}$$

$$S_n - r \cdot S_n = a \qquad\qquad\qquad\qquad - ar^n$$

すなわち，

$$\begin{aligned} S_n - r \cdot S_n &= a - ar^n \\ S_n(1-r) &= a(1-r^n) \end{aligned}$$

である。それ故に，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{2.2}$$

である。

2.2 無限幾何級数

さて，それではこの幾何級数が無限に進む（$n \to \infty$）としたら，上式はどういうことになるのか。

$$\begin{aligned} S_{n\to\infty} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-r^n) \\ &= \frac{a}{1-r}\left[1 - \lim_{n\to\infty}(r^n)\right] \end{aligned}$$

ここで，公比 r の絶対値 $|r|$ の大きさが，

1. もし $|r|>1$ ならば，上式は収束しない。
2. もし $|r|<1$ ならば，$n \to \infty$ に応じて，$r^n \to 0$ になる。すなわち，$\lim_{n\to\infty}(r^n)$ は 0 に収束する。それゆえに，もし $|r|<1$ ならば，

$$S_{n\to\infty} = \frac{a}{1-r} \tag{2.3}$$

である。

3. 複利

3.1 複利

年間利子率を i とすると，もし価値 A の元金をこの利子率で貸し付けるならば，1 年目の終わりには，元金と利子とを合計して，この資産は，

$$S_1 = A(1+i)$$

になる。

複利とは，一定額の元金をベースに利子を計算する（＝単利）のではなく，一度利子が付け加えられたらそれが元金に算入されて次の利子計算のベースになるような，そういう金利のことである。今日，通常，利子と言ったら複利を指す。たとえば，今年の年始に銀行に年利率 1%で 100 万円預金したとしよう。この場合，今年の年末にはこの預金は利子が加わって 101 万円（100×1.01）になる。ここで，一銭もおろさないでおけば，来年の元金は 100 万円ではなく，101 万円になる。したがって，来年の年末には 102.01 万円，すなわち，

$$101 \times 1.01 = (100 \times 1.01) \times 1.01 = 100 \times (1.01)^2$$

になっている。

一般に，複利で計算すると，もし価値 A の元金年間利子率 i で貸し付けるならば，n 年目の終わりには，元金と複利との合計 S_n は，

$$S_n = A(1+i)^n \tag{3.1}$$

になる。

3.2 割引現在価値

利子のコスト化が完成すると，未来のある一定時点の一定金額が現在の時点でどれだけの価値を持っているのか，計算することができるようになる。

利子のコスト化が完成すると，そもそも現在の一定価値額は，実際に貸し付けられていなくても，自然に未来に利子を生んで増えるべきものになる。だから，年利子率が 1%だとすると，現在の 100 万円は 1 年後には最低でも（企業活動のリスクを負わなくても）101

Memo

万円になっていなければならないものになる。企業の立場から見ると，100 万円を投資して企業活動を行って 1 年後に 101 万円しか回収できなかったとしたら，その企業活動は無意味だったということになる。ただそれを貸し付けておくだけで，アームチェアに座ったまま，この資産の価値は 1 年後には 101 万円になっているはずである。これを逆に見ると，1 年後の 101 万円は現時点では 100 万円の価値しかもっていないのだと言える。つまり，将来の 101 万円の現在の価値を算出するためには，利子率によって，この 101 万円を割り引かなければならない。1 年後の 101 万円の**割引現在価値**は 100 万円である。

一般的に，年複利を前提するかぎり，n 年後の R 円の割引現在価値 A は，(3.1)より，

$$A=\frac{R}{(1+i)^n} \tag{3.2}$$

である。

3.3 資本還元

今度は，(一回こっきりじゃなく) 年度末に定期的に R 円の収入が発生するような資産を想定して，その資産の現在価値を考えてみよう。このような資産の割引現在価値は，各年度末の R の収入の割引現在価値の総和になる。

引き続いて一定の利子率 i を仮定すると，n 年にわたる各年度末の R の収入の現在価値 A は，(3.2)より，——

$$\begin{aligned}A&=R\left(\frac{1}{1+i}\right)+R\left(\frac{1}{1+i}\right)^2+\cdots+R\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\\&=\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]+\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)+\cdots+\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

である。これは初項 $R\left(\frac{1}{1+i}\right)$，公比 $\frac{1}{1+i}$，項数 n の幾何級数を定義する。したがって，幾何級数の公式(2.2)より，

$$\begin{aligned}A&=\frac{\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{1+i}}\\&=\frac{\left[R\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{\frac{i}{1+i}}\\&=\frac{R\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{i}\\&=\frac{R\cdot\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}\end{aligned}$$

すなわち，

$$A=\frac{R\cdot\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} \tag{3.3}$$

である。

今度は，R 円の収入が単に定期的に発生するだけではなく，未来永劫にわたって毎年度末に確実に R の大きさの収入をもたらしてくれるような資産 A があると想定してみよう。ここで，$\frac{1}{1+i}<1$ である以上，上式(3.3)は収束することになる。したがって，この資産の割引現在価値は，無限幾何級数の公式(2.3)より，——

$$\begin{aligned}A&=\frac{R\left(\frac{1}{1+i}\right)}{1-\frac{1}{1+i}}\\&=\frac{\frac{R}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}\end{aligned}$$

すなわち，

$$A=\frac{R}{i} \tag{3.4}$$

になる。こうして，資産 A の割引現在価値を計算する

Memo

ことができるわけである。これがどういうことかと言うと，資産 A の所有者は，$\dfrac{R}{i}$ の貨幣と引き換えならば，現在，今すぐ，喜んでこの資産を手放そうとするということである。

こうして，たとえば毎年 R 円の配当をもたらす（と期待することができる）株式の理論株価や，またたとえば毎年 R 円の地代（＝賃貸料）をもたらす土地の理論地価を計算することが可能になる。このようにして定期的収入から，それをもたらす資産の価値を産出することを**資本還元**と言う。

4. 補論：連続複利

4.1 ネイピア数

一般に，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{4.1}$$

は，x の値の大きさに関わりなく，一定の大きさ（＝定数）になるということが知られている。この一定の大きさは**ネイピア数**と呼ばれ，e で表される。e は無理数であり，約 2.718 である。通常は，e は**自然対数の底**として知られている。

4.2 連続複利

いままでわれわれは 1 年間に 1 回複利がつくという前提の元で，それが何年間続くのかを問題にしてきた。今度は 1 年間を前提にして，この期間中に何度も複利がつくということを問題にしよう。例えば，1 年に 1 回 1%の複利がつくのではなく，半年ごとに 0.5%の複利がつくと考えるのである。この場合には，一定の利子率 i の下での年末における元金 A と複利との合計 S_2 は

$$S_2=\left[A\left(1+\frac{0.01}{2}\right)\right]\left(1+\frac{0.01}{2}\right)=A\left(1+\frac{0.01}{2}\right)^2$$

一般化して言うと，一年間につく複利の回数を n とすると，一定の利子率 i の下での年末における元金 A と複利との合計 S_n は

$$S_n=A\left(1+\frac{i}{n}\right)^n \tag{4.2}$$

になる。

計算してみると，年間の利子率は年に 10 回（約 37 日ごとに）複利がつく場合には，

$\left[\left(1+\dfrac{0.01}{10}\right)^{10}-1\right]\cong 0.0100451$，つまり約 1.00451%

になる。年に 20 回（約 18 日ごとに）複利がつく場合には，

$\left[\left(1+\dfrac{0.01}{20}\right)^{20}-1\right]\cong 0.0100476$，つまり約 1.00476%

になる。年に 30 回（約 12 日ごとに）複利がつく場合には，

$\left[\left(1+\dfrac{0.01}{30}\right)^{30}-1\right]\cong 0.0100485$，つまり約 1.00485%

になる。年に 40 回（約 9 日ごとに）複利がつく場合には，

$\left[\left(1+\dfrac{0.01}{40}\right)^{40}-1\right]\cong 0.0100489$，つまり約 1.00489%

になる。このように，以下の事実が現れた。

- 年間利子率は複利の回数が多ければ多いほど高くなる。
- しかしまた，この高さの増大分は段々と減っていく。

このことから，一定の期間（この場合には 1 年間）と一定の利子率（この場合には 10%）という前提のもとで，複利の回数が無限に近付くのにつれて，年間利子率は，高くなるが無限に高くなるわけではなく，ある値に収束する――ということが直感的に予想されるだろう。もしそうならば，瞬間的・連続的に複利が加算される場合に，最も年間利子率が高くなるだろう。これが**連続複利**である。定式化すると，連続複利の場合の年末における元金 A と複利との合計 $S_{n\to\infty}$ は

Memo

$$S_{n\to\infty}=\lim_{n\to\infty}A\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}$$

である。ここで，$n=\frac{n}{i}\cdot i$，また$\frac{i}{n}=\frac{1}{\frac{n}{i}}$だから，

$$S_{n\to\infty}=A\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}\cdot i}=A\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}}\right]^{i}$$

である。ここで，$\frac{n}{i}=x$と表記すると，上式の中の$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}}$は$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$になる。式(4.1)より，これはネイピア数$e$を定義する。それゆえに，

$$S_{n\to\infty}=Ae^{i} \tag{4.3}$$

である[1]。こうして，1%の利子率の元で，1 年間，連続複利がつくと，その利子率は$e^{0.01}-1\cong 0.0100502$，すなわち約 1.00502%になる。

なお，この連続複利がt年間続くと，元金Aと複利との合計$S_{n\to\infty,\,t}$は

$$S_{n\to\infty,\,t}=Ae^{it} \tag{4.4}$$

になる。

2022/06/16 22:10 最終更新

最新版はオンラインで確認してください。このドキュメントの URL：
http://y-imai.com/lectures/handouts/appendix_qualitative-division.pdf

1）ここでは，説明の都合上から，最初にネイピア数を説明し，それを連続複利にあてはめた。だが実際には，ネイピア数の方が複利の研究から明らかになったのである。

Memo