『9. 労働時間の延長……』への数学的補足

1. はじめに

『9. 労働時間の延長と労働強度の強化』のレジュメには，次のような記述がある。

> （以下では，可変資本の変化分を$\dot{v}$，剰余価値の変化分を$\dot{s}$で表す）。形式的に言うと，剰余価値率の上昇は，可変資本の変化率よりも剰余価値の変化率の方が大きい（$\frac{\dot{s}}{s} > \frac{\dot{v}}{v}$）場合には必ず生じる。したがって，たとえ剰余価値量が減少しても（$0 > \frac{\dot{s}}{s}$），もし剰余価値の減少率が可変資本の減少率よりも小さければ（$0 > \frac{\dot{s}}{s} > \frac{\dot{v}}{v}$），剰余価値率は上昇する。
>
> しかし，個々の従業員が産み出す剰余価値量の総和は社会全体での剰余価値量に等しい。したがって，社会全体での従業員数の増大が相殺しないかぎり，個々の従業員が産み出す剰余価値量の減少は，社会的に見てもやはり剰余価値の総量の減少にならざるをえない。こういうわけで，ここでは，このような特殊なケースは無視することにする。

この講義では，曖昧に「変化分」と呼んだが，通常，$\dot{s}*$，$\dot{s}$，$\dot{v}$は時間（t）に関する 1 階の導関数を表す。そこで，この関数の導出の仕方を一応，補足しておく。

なお，このページの内容を理解することができなくても一向にかまわない。また，このページの内容を試験に出すことはない。

2. 本論

2.1 基礎知識

以下の説明では，次の知識を前提する。

対数：一般に，b を 1 以外の正の実数，また a を正の実数とすると，もし $a = b^p$ であるならば，$p = \log_b a$ が成り立つ。これを，「p は b を底とする a の対数である」と表現する。要するに，対数とは，冪乗における指数である。

自然対数：底がネイピア数という定数（約 2.718）

Memo

であるような対数を自然対数と呼ぶ [1)]。ここでは，a の自然対数を $\ln a$ で表そう。

分数の対数演算：

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right)=\log_b a-\log_b c \tag{1}$$

自然対数の微分： $y=f(x)=\ln x$ とすると，——

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\ln x)=x^{-1}=\frac{1}{x} \tag{2}$$

連鎖規則：$y=f(z)$，$z=g(x)$ とすると，——

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \tag{3}$$

2.2 論証

剰余価値率を $s*$ とすると，——

$$s*=\frac{s}{v}$$

である。両辺の自然対数をとると，分数の対数演算規則 (1) から，——

$$\ln s*=\ln s-\ln v \tag{4}$$

になる。ここで，$s*$，s，v をそれぞれ，時間 t の関数とみなす。すなわち，$s*=s*(t)$，$s=s(t)$，$v=v(t)$。したがって，式 (4) は，——

$$\ln\left[s*(t)\right]=\ln\left[s(t)\right]-\ln\left[v(t)\right]$$

になる。そこで，両辺を時間 (t) について微分すると，——

$$\frac{d}{dt}\left\{\ln\left[s*(t)\right]\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\ln\left[s(t)\right]\right\}-\frac{d}{dt}\left\{\ln\left[v(t)\right]\right\}$$

になる。したがって，連鎖規則 (3) によって，——

$$\frac{d}{ds*}(\ln s*)\cdot\frac{d}{dt}\left[s*(t)\right]$$
$$=\frac{d}{ds}(\ln s)\cdot\frac{d}{dt}\left[s(t)\right]-\frac{d}{dv}(\ln v)\cdot\frac{d}{dt}\left[v(t)\right]$$

になる。したがってまた，対数の導関数の規則 (2) によって，——

$$\frac{\frac{d}{dt}\left[s*(t)\right]}{s*}=\frac{\frac{d}{dt}\left[s(t)\right]}{s}-\frac{\frac{d}{dt}\left[v(t)\right]}{v}$$

になる。ここで，それぞれ，$\frac{d}{dt}\left[s*(t)\right]=\dot{s}*$，$\frac{d}{dt}\left[s(t)\right]=\dot{s}$，$\frac{d}{dt}\left[v(t)\right]=\dot{v}$ とおくと，——

$$\frac{\dot{s}*}{s*}=\frac{\dot{s}}{s}-\frac{\dot{v}}{v} \tag{5}$$

になる。ここで，$\frac{\dot{s}*}{s*}$ は剰余価値率の変化率，$\frac{\dot{s}}{s}$ は剰余価値の変化率，$\frac{\dot{v}}{v}$ は可変資本の変化率を表す。したがって，剰余価値率の変化率が正である（$\frac{\dot{s}*}{s*}>0$）ための条件は，——

$$\left(\frac{\dot{s}}{s}-\frac{\dot{v}}{v}\right)>0$$

すなわち，——

$$\frac{\dot{s}}{s}>\frac{\dot{v}}{v} \tag{6}$$

すなわち，——

---

1) ネイピア数については，『利子のコスト化に関連する数学的補足』：http://y-imai.com/lectures/handouts/appendix_qualitative-division.pdf の「4.1 ネイピア数」を参照して欲しい。

Memo

$$\frac{\dot{s}}{\dot{v}} > \frac{s}{v} \tag{7}$$

である。

結論：式 (6) において，s および v の符号は常に正であるから，たとえかりに剰余価値が減少した（$0 > \dot{s}$）としても，もし可変資本も減少し（$0 > \dot{v}$），なおかつ $0 > \frac{\dot{s}}{s} > \frac{\dot{v}}{v}$ であるならば，剰余価値率は増大することになる。

3. おまけ

なお，以上の「2. 本論」を読んでもわからなかった場合には，以下の解説を参考にすること。

ある短い期間において剰余価値 (s) が変化した量を Δs とし，またこれと同じ期間において可変資本（v）が変化した量を Δv とする。そうすると，剰余価値率 ($\frac{s}{v}$) がこの短い期間において上昇していくための条件は，もともとの剰余価値率よりも，この期間において変化した分の剰余価値率（$\frac{\Delta s}{\Delta v}$）の方が高いということ，すなわち，――

$$\frac{\Delta s}{\Delta v} > \frac{s}{v} \tag{8}$$

である。したがってまた，――

$$\frac{\Delta s}{s} > \frac{\Delta v}{v} \tag{9}$$

である。

上式 (8) を前出の式 (7) と比較せよ。また，上式 (9) を前出の式 (6) と比較せよ。前出の式 (6) および (7) で $\dot{s}$ および $\dot{v}$ とあるのは，上式 (8) および (9) での Δs および Δv とほとんど同じ意味である。(単なる「短い期間」ではなく，ほんの「瞬間」の剰余価値の変化分が $\dot{s}$ である。また，単なる「短い期間」ではなく，ほんの「瞬間」の可変資本の変化分が $\dot{v}$ である)。そこで，Δs を $\dot{s}$ に置き換え，また Δv を $\dot{v}$ に置き換え，その上で，前出の「結論」をもう一度，読み直してみよ。

2022/06/17 0:35 最終更新

最新版はオンラインで確認してください。このドキュメントの URL：
http://y-imai.com/lectures/handouts/appendix_econ_09.pdf

Memo